

Um esquema *upwind* por partes baseado em curvas quadráticas de Bézier para discretização de termos convectivos[☆]

A piecewise upwind scheme based on quadratic Bézier curves for discretization of convective terms

P. R. Oviedo^{1,†}, B. M. Rocha², R. A. B. de Queiroz³

¹Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brasil

²Departamento de Ciência da Computação, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brasil

³Departamento de Computação, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Brasil

[†]Autor correspondente: pablo.cesar.r.o@gmail.com

Resumo

Este trabalho apresenta um novo esquema *upwind* de alta resolução construído com base no conceito das curvas de Bézier que satisfaz diversos critérios de estabilidade no contexto da solução numérica de problemas de transporte dominado por convecção na dinâmica dos fluidos computacional. O esquema foi testado resolvendo os problemas da advecção linear e o problema de Burgers viscoso. Os resultados dessas simulações sugerem que o esquema proposto é uma alternativa atraente para problemas dominados por convecção quando comparado com outros esquemas da literatura.

Palavras-chave

Dinâmica dos fluidos • *Upwind* • Convecção • Variável normalizada

Abstract

This work presents a new high-resolution *upwind* scheme built based on the concept of Bézier curves that satisfy critical stability criteria for the numerical solution of transport problems dominated by convection in computational fluid dynamics. The proposed scheme consists of a piecewise quadratic Bézier curve. The scheme is tested by solving linear advection problems and the viscous Burger problem. The results of these simulations suggest that the proposed scheme is an attractive alternative for problems dominated by convection.

Keywords

Fluid dynamics • *Upwind* • Convection • Normalized variable

1 Introdução

Muitos problemas da dinâmica de fluidos computacional são modelados por equações diferenciais parciais (EDP) e uma parte significativa desses problemas é predominantemente dominada por convecção. A solução numérica

[☆]Este artigo é uma versão estendida do trabalho apresentado no XXVI ENMC Encontro Nacional de Modelagem Computacional e XIV ECTM Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais, ocorridos em Nova Friburgo – RJ, de 25 a 27 de outubro de 2023.

dessas equações depende do tratamento adequado dos termos convectivos, o que em geral é muito desafiador. Esquemas *upwind* de alta ordem têm sido uma alternativa adequada para discretizar termos convectivos de EDPs que governam problemas de escoamento de fluidos no contexto de métodos de diferenças finitas e volumes finitos [1, 2]. Os principais objetivos desses esquemas são manter a estabilidade da solução numérica, ser convergente e resolver discontinuidades ou choques sem oscilações numéricas ou, em casos extremos, com oscilações limitadas [3].

Para um esquema numérico atingir todos os objetivos mencionados acima, uma abordagem comum tem sido combinar as restrições do *Normalized Variable Diagram* (NVD) fornecidas por Leonard [4] ou limitadores de fluxo [5, 6] com as restrições *Total Variation Diminishing* (TVD) de Harten [7]. Outros critérios como o critério *Convection Boundedness Criterion* (CBC) proposto por Gaskell e Lau [8] e a condição *Boundedness, Accuracy and Interpolative Reasonability* (BAIR) de Wei et al. [9] e Ping-Li et al. [10] também costumam ser utilizados para se avaliar esses esquemas numéricos.

Assim, neste trabalho será apresentado um novo esquema *upwind* para o termo convectivo baseado nas curvas quadráticas de Bézier por partes. O esquema será chamado de PUBICK (do inglês, *Piecewise Upwind Bézier Interpolation for Convective Kinematics*) e é construído de forma a satisfazer as restrições NVD e TVD, o critério CBC e também a condição BAIR.

2 Formulação de variáveis normalizadas

A *Normalized Variable Formulation* (NVF) foi proposta por Leonard [4] para obter esquemas convectivos capazes de resolver gradientes elevados e simultaneamente manter a estabilidade das soluções numéricas. Considere as posições D (*Downstream*), R (*Remote-upstream*) e U (*Upstream*) em relação a uma face computacional f do estêncil computacional, conforme ilustrado na Fig. 1. Dentro desse contexto, uma fórmula para uma variável ϕ escrita na abordagem de NVF é dada por:

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}, \quad (1)$$

onde ϕ_D e ϕ_R são os valores não normalizados da quantidade ϕ nos pontos D e R , respectivamente.

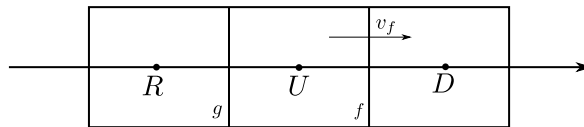


Figura 1: Posições D , R e U em relação a face f . O sinal da velocidade v_f descreve a direção do fluxo.

Outra ferramenta valiosa neste contexto é o diagrama conhecido como NVD, que foi desenvolvido por Leonard [4] para representar a relação entre as variáveis normalizadas $\hat{\phi}_f$ e $\hat{\phi}_U$. De acordo com Leonard [4], qualquer esquema numérico, em geral não linear, que é escrito na abordagem NVF e que passa pelos pontos $O(0, 0)$, $P(1, 1)$ e $Q(0, 5, 0, 75)$ do NVD (ver Fig. 2) é de segunda ordem de precisão. Além disso, se o esquema no NVD passar pelo ponto Q com uma inclinação de $0,75$, então este caracteriza-se como um esquema preciso de terceira ordem. Leonard [4] aconselha que para valores de $\hat{\phi}_U$ menores que 0 ou maiores que 1 , deve-se usar o esquema *upwind* de primeira ordem (FOU), ou seja, $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_U$.

3 Derivação do esquema PUBICK

Nesta seção, é apresentada uma nova formulação de um esquema *upwind* proposto com base nas curvas de Bézier (ver [11]). Este esquema utiliza a curva quadrática de Bézier definida em duas partes, para $\hat{\phi}_U \in [0, 0, 5]$ e para $\hat{\phi}_U \in [0, 5, 1]$. O esquema satisfaz as condições estabelecidas por Leonard [4] no NVD, ou seja, passa pelos pontos $O(0, 0)$, $Q(0, 5, 0, 75)$ e $P(1, 1)$ com inclinação igual a $0,75$ em Q . Além de atender às restrições TVD, o esquema também satisfaz os critérios CBC e a condição BAIR. A formulação deste esquema é apresentada a seguir.

Considere $\hat{\phi}_U \in [0, 0, 5]$ e os pontos de controle $\{(0, 0), (\mu_1, \nu_1), (0, 5, 0, 75)\}$. Então, tem-se a seguinte curva quadrática de Bézier C_1 dada por:

$$C_1(t) = (\hat{\phi}_U(t), \hat{\phi}_{1f}(t)) = \left(2\mu_1 t + \left(\frac{1}{2} - 2\mu_1 \right) t^2, 2\nu_1 t + \left(\frac{3}{4} - 2\nu_1 \right) t^2 \right). \quad (2)$$

A curva $C_1(t)$ deve satisfazer as condições de Leonard [4], logo, deve existir $t_0 \in [0, 1]$ tal que seja possível resolver

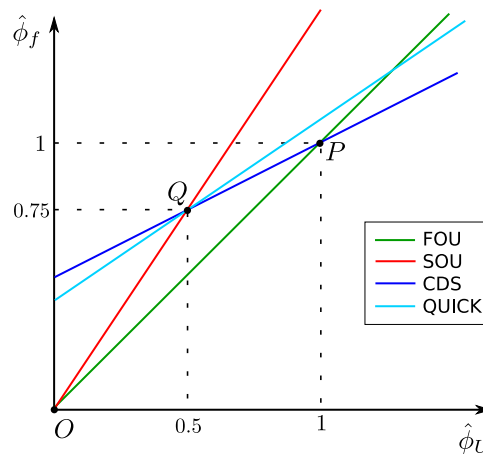


Figura 2: Esquemas convectivos no NVD: *upwind* de primeira ordem (FOU), *upwind* de segunda ordem (SOU), diferença central de segunda ordem (CDS) e *upwind* de terceira ordem (QUICK).

o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0,5 &= 2\mu_1 t_0 + \left(\frac{1}{2} - 2\mu_1\right) t_0^2, \\ 0,75 &= 2\nu_1 t_0 + \left(\frac{3}{4} - 2\nu_1\right) t_0^2, \\ 0,75 &= \left. \frac{d\hat{\phi}_f}{d\hat{\phi}_U} \right|_{t=t_0} = \frac{4\nu_1 + (3 - 8\nu_1)t_0}{4\mu_1 + (2 - 8\mu_1)t_0}. \end{cases} \quad (3)$$

Como a curva de Bézier interpola o ponto de controle final, tem-se que $t_0 = 1$, então $\nu_1 = \frac{3}{8}(2\mu_1 + 1)$.

Da Eq. (2), pode-se expressar $\hat{\phi}_{1f}$ em função de $\hat{\phi}_U$, e substituindo o valor de ν_1 , obtém-se que:

$$\hat{\phi}_{1f} = \frac{3}{4(4\mu_1 - 1)^2} \left\{ (4\mu_1)(4\mu_1 - 1)\hat{\phi}_U + (2\mu_1 - 1) \left(2\mu_1 - \sqrt{4\mu_1^2 + 2(1 - 4\mu_1)\hat{\phi}_U} \right) \right\} \quad (4)$$

Para $\hat{\phi}_U \in [0.5, 1]$, usam-se os pontos de controle $\{(0, 5, 0, 75), (\mu_2, \nu_2), (1, 1)\}$. Então, tem-se a seguinte curva quadrática de Bézier C_2 :

$$\begin{aligned} C_2(t) &= (\hat{\phi}_U(t), \hat{\phi}_{2f}(t)) \\ &= \left(\frac{1}{2} + (2\mu_2 - 1)t + \left(\frac{3}{2} - 2\mu_2\right) t^2, \frac{3}{4} + \left(2\nu_2 - \frac{3}{2}\right) t + \left(\frac{7}{4} - 2\nu_2\right) t^2 \right). \end{aligned} \quad (5)$$

A curva $C_2(t)$ deve satisfazer as condições de Leonard [4]. Então, deve existir $t_0 \in [0, 1]$ tal que seja possível resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0.5 &= \frac{1}{2} + (2\mu_2 - 1)t_0 + \left(\frac{3}{2} - 2\mu_2\right) t_0^2, \\ 0.75 &= \frac{3}{4} + \left(2\nu_2 - \frac{3}{2}\right) t_0 + \left(\frac{7}{4} - 2\nu_2\right) t_0^2, \\ 0.75 &= \left. \frac{d\hat{\phi}_f}{d\hat{\phi}_U} \right|_{t=t_0} = \frac{4\nu_2 - 3 + (7 - 8\nu_2)t_0}{4\mu_2 - 2 + (6 - 8\mu_2)t_0}. \end{cases} \quad (6)$$

Novamente, como a curva de Bézier interpola o ponto de controle inicial, tem-se que $t_0 = 0$, então $\nu_2 = \frac{3}{8}(2\mu_2 + 1)$.

Da Eq. (5) pode-se expressar $\hat{\phi}_{2f}$ em função de $\hat{\phi}_U$, e substituindo o valor de ν_2 , obtemos

$$\hat{\phi}_{2f} = -\frac{1}{4(4\mu_2 - 3)^2} \left\{ (4\mu_2 - 3)(5 - 6\mu_2 + 4(2 - 3\mu_2)\hat{\phi}_U) + (1 - 2\mu_2) \left(1 - 2\mu_2 + \sqrt{4\mu_2^2 - 2 + 2(3 - 4\mu_2)\hat{\phi}_U} \right) \right\}. \quad (7)$$

A partir das equações Eq. (4) e Eq. (7), define-se o esquema PUBICK usando a formulação de NV, que para $\hat{\phi}_U \notin [0, 1]$ utiliza-se o esquema FOU. O esquema PUBICK é dado por:

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} \frac{3}{4(4\mu_1 - 1)^2} \left\{ (4\mu_1)(4\mu_1 - 1)\hat{\phi}_U + (2\mu_1 - 1) \left(2\mu_1 - \sqrt{4\mu_1^2 + 2(1 - 4\mu_1)\hat{\phi}_U} \right) \right\}, & \hat{\phi}_U \in [0, 0.5], \\ -\frac{1}{4(4\mu_2 - 3)^2} \left\{ (4\mu_2 - 3)(5 - 6\mu_2 + 4(2 - 3\mu_2)\hat{\phi}_U) + (1 - 2\mu_2) \left(1 - 2\mu_2 + \sqrt{4\mu_2^2 - 2 + 2(3 - 4\mu_2)\hat{\phi}_U} \right) \right\}, & \hat{\phi}_U \in [0.5, 1], \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \notin [0, 1]. \end{cases} \quad (8)$$

Pode-se mostrar que o esquema proposto PUBICK é CBC, TVD e BAIR para μ_1 e μ_2 satisfazendo:

$$\mu_1 \in \left[\frac{3}{10}, \frac{1}{2} \right] \quad \text{e} \quad \mu_2 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{6} \right] - \left\{ \frac{3}{4} \right\} \quad (9)$$

4 Resultados numéricos

4.1 Resolução da equação de advecção linear

A equação da advecção linear, que governa o transporte de quantidades escalares, é descrita pela seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

onde a é a velocidade constante, $u(x, t)$ é a variável de interesse definida no domínio espacial $\Omega = [x_L, x_R]$ tal que $t \in [0, t_f]$, onde t_f é o tempo final. Para o teste numérico realizado, o problema da Eq. (10) foi resolvido considerando $a = 1$, o domínio $\Omega = [-1, 1]$, e uma condição inicial suave (ver [12]) dada por

$$u_0(x) = \sin^4(\pi x). \quad (11)$$

Condições de contorno periódicas no contorno à esquerda em $x = x_L$ e à direita em $x = x_R$ foram consideradas para a solução numérica [13]. A solução exata conhecida [14] para este problema é dada por $u(x, t) = u_0(x - at)$.

Para os experimentos foram adotadas malhas numéricas constituídas por $N = \{80, 160, 320, 640\}$ células computacionais e espaçamentos dados por $\Delta x = 2/N$. O tempo final da simulação foi considerado como $t_f = 0,5$ e o número de Courant foi escolhido como sendo 0,001.

A Tabela 1 mostra os erros, bem como as estimativas de precisão para os esquemas PUBICK, TOPUS [15], SMART [8] e o esquema clássico FOU [16]. Pode-se observar que os resultados do esquema PUBICK são tão bons quanto aqueles dos esquemas TOPUS e SMART. Além disso, pode-se observar na tabela que, com exceção do esquema FOU, os diferentes esquemas preservaram uma precisão de segunda ordem quando o erro é medido pela norma L_1 ($\|E\|_1$). Pode-se ver também que o esquema SMART apresenta o menor erro dentre os esquemas avaliados para este problema.

4.2 Resolução da equação de Burgers viscosa

Nesta seção, os resultados numéricos da ordem de convergência dos esquemas numéricos para a equação de Burgers com viscosidade $\nu > 0$ são apresentados. Foi considerado um caso com solução analítica, conforme estudado por [17], para realizar o estudo de convergência numérica dos esquemas. O problema considerado é dado por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \Omega = [0, 1] \quad (12)$$

com as seguintes condições de contorno

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (13)$$

Tabela 1: Equação de advecção linear: estudo de convergência no domínio $\Omega = [-1, 1]$ com condição inicial (Eq. (11)) suave usando os esquemas PUBICK, TOPUS, SMART e FOU.

esquema	N	erro		erro		erro	
		$\ E\ _1$	ordem	$\ E\ _2$	ordem	$\ E\ _\infty$	ordem
PUBICK	80	$1,579 \times 10^{-2}$	—	$2,000 \times 10^{-2}$	—	$3,751 \times 10^{-2}$	—
	160	$4,113 \times 10^{-3}$	1,941	$6,174 \times 10^{-3}$	1,696	$1,448 \times 10^{-2}$	1,374
	320	$1,031 \times 10^{-3}$	1,996	$1,846 \times 10^{-3}$	1,742	$5,475 \times 10^{-3}$	1,403
	640	$2,558 \times 10^{-4}$	2,011	$5,457 \times 10^{-4}$	1,759	$2,046 \times 10^{-3}$	1,420
TOPUS	80	$2,321 \times 10^{-2}$	—	$2,830 \times 10^{-2}$	—	$4,643 \times 10^{-2}$	—
	160	$5,839 \times 10^{-3}$	1,991	$8,718 \times 10^{-3}$	1,699	$1,818 \times 10^{-2}$	1,353
	320	$1,447 \times 10^{-3}$	2,013	$2,576 \times 10^{-3}$	1,759	$6,880 \times 10^{-3}$	1,402
	640	$3,461 \times 10^{-4}$	2,064	$7,475 \times 10^{-4}$	1,785	$2,560 \times 10^{-3}$	1,426
SMART	80	$9,810 \times 10^{-3}$	—	$1,051 \times 10^{-2}$	—	$1,962 \times 10^{-2}$	—
	160	$2,524 \times 10^{-3}$	1,959	$2,990 \times 10^{-3}$	1,814	$6,660 \times 10^{-3}$	1,559
	320	$6,349 \times 10^{-4}$	1,991	$8,696 \times 10^{-4}$	1,782	$2,320 \times 10^{-3}$	1,521
	640	$1,582 \times 10^{-4}$	2,005	$2,572 \times 10^{-4}$	1,757	$9,500 \times 10^{-4}$	1,288
FOU	80	$2,180 \times 10^{-1}$	—	$1,820 \times 10^{-1}$	—	$1,873 \times 10^{-1}$	—
	160	$1,209 \times 10^{-1}$	0,851	$1,024 \times 10^{-1}$	0,829	$1,066 \times 10^{-1}$	0,814
	320	$6,397 \times 10^{-2}$	0,918	$5,476 \times 10^{-2}$	0,903	$5,718 \times 10^{-2}$	0,898
	640	$3,295 \times 10^{-2}$	0,957	$2,838 \times 10^{-2}$	0,948	$2,966 \times 10^{-2}$	0,947

e uma condição inicial suave

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad (14)$$

tal que a solução exata da série de Fourier (ver [17]) é dada por

$$u(x, t) = 2\pi\nu \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2\pi^2\nu t) n \sin(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2\pi^2\nu t) n \cos(n\pi x)}, \quad (15)$$

onde os coeficientes são

$$a_0 = \int_0^1 \exp\{-(2\pi\nu)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\} dx, \quad (16)$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \exp\{-(2\pi\nu)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\} \cos(n\pi x) dx, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (17)$$

O estudo de convergência foi feito considerando malhas com espaçamentos dados por $\Delta x = 1/N$, onde $N = \{32, 64, 128, 256\}$ foi realizado para avaliar o esquema PUBICK e compará-lo com os métodos TOPUS, SMART e FOU.

As simulações foram realizadas com número de Courant 0,001, $\nu = 0, 1$ e tempo final $t_f = 0, 8$. A solução exata dada por Eq. (15) foi calculada usando integração numérica e um total de $n = 100$ termos para garantir precisão numérica suficiente nos resultados.

Os resultados do estudo de convergência são apresentados na Tabela 2. Os resultados mostram que os esquemas PUBICK, TOPUS e SMART alcançaram precisão de segunda ordem, enquanto FOU alcançou precisão de primeira ordem, conforme esperado. Além disso, pode-se notar que para este problema não linear e mais desafiador do ponto de vista de solução numérica, os menores erros foram obtidos com o esquema PUBICK para a escolha $\mu_1 = \frac{3}{10}$ e $\mu_2 = \frac{5}{6}$.

Tabela 2: Resolução da equação de Burgers viscosa: estudo de convergência dos esquemas *upwind*.

Esquema	N	erro	ordem	erro	ordem	erro	ordem
		$\ E\ _1$	$\ E\ _1$	$\ E\ _2$	$\ E\ _2$	$\ E\ _\infty$	$\ E\ _\infty$
PUBICK	32	$9,185 \times 10^{-4}$	—	$1,058 \times 10^{-3}$	—	$1,492 \times 10^{-3}$	—
	64	$2,663 \times 10^{-4}$	1,786	$3,047 \times 10^{-4}$	1,796	$4,138 \times 10^{-4}$	1,850
	128	$7,351 \times 10^{-5}$	1,857	$8,357 \times 10^{-5}$	1,866	$1,102 \times 10^{-4}$	1,908
	256	$1,992 \times 10^{-5}$	1,883	$2,257 \times 10^{-5}$	1,888	$2,925 \times 10^{-5}$	1,914
TOPUS	32	$1,029 \times 10^{-3}$	—	$1,148 \times 10^{-3}$	—	$1,553 \times 10^{-3}$	—
	64	$2,878 \times 10^{-4}$	1,838	$3,223 \times 10^{-4}$	1,833	$4,229 \times 10^{-4}$	1,876
	128	$7,708 \times 10^{-5}$	1,901	$8,650 \times 10^{-5}$	1,898	$1,116 \times 10^{-4}$	1,922
	256	$2,048 \times 10^{-5}$	1,912	$2,303 \times 10^{-5}$	1,909	$2,943 \times 10^{-5}$	1,923
SMART	32	$1,212 \times 10^{-3}$	—	$1,363 \times 10^{-3}$	—	$1,736 \times 10^{-3}$	—
	64	$3,130 \times 10^{-4}$	1,953	$3,520 \times 10^{-4}$	1,953	$4,487 \times 10^{-4}$	1,952
	128	$8,042 \times 10^{-5}$	1,961	$9,040 \times 10^{-5}$	1,961	$1,149 \times 10^{-4}$	1,965
	256	$2,090 \times 10^{-5}$	1,944	$2,352 \times 10^{-5}$	1,942	$2,984 \times 10^{-5}$	1,945
FOU	32	$1,119 \times 10^{-2}$	—	$1,338 \times 10^{-2}$	—	$1,803 \times 10^{-2}$	—
	64	$5,965 \times 10^{-3}$	0,908	$7,181 \times 10^{-3}$	0,898	$9,641 \times 10^{-3}$	0,903
	128	$3,077 \times 10^{-3}$	0,955	$3,713 \times 10^{-3}$	0,951	$4,976 \times 10^{-3}$	0,954
	256	$1,562 \times 10^{-3}$	0,978	$1,887 \times 10^{-3}$	0,976	$2,528 \times 10^{-3}$	0,977

5 Conclusões

Este trabalho apresentou um novo esquema *upwind*, denominado esquema PUBICK, para a aproximação do termo convectivo em problemas da dinâmica dos fluidos computacional. O esquema proposto satisfaz importantes critérios desejáveis de solução, tais como as condições BAIR, CBC e TVD. O esquema foi comparado com o esquema TOPUS e SMART, consolidados na literatura, testando-o na equação de advecção linear, onde se vê que o esquema apresenta um erro menor do que o esquema TOPUS. Também foi testado na equação de Burgers, onde se constatou que os resultados do PUBICK são melhores que os do TOPUS e do SMART, este último sendo um esquema bem popular e utilizado na literatura. O novo esquema PUBICK parece ser uma estratégia promissora para lidar com problemas desafiadores de fluxo de fluidos, especialmente problemas não lineares como a equação de Burgers. No futuro, propõe-se apresentar a análise completa que mostra que o esquema satisfaz as condições de estabilidade mencionadas assim como aplicar o esquema PUBICK para resolver problemas mais complexos.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pelas agências brasileiras CAPES, CNPq e FAPEMIG. O apoio dessas agências é reconhecido com gratidão. Este trabalho foi financiado pela Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), com bolsa da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - Brasil - Código Financeiro 001. Este trabalho de pesquisa foi financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) sob os números dos processos 310722/2021-7 e 423278/2021-5.

Referências

- [1] V. G. Ferreira, R. A. B. Queiroz, M. A. C. Candezano, G. A. B. Lima, L. Corrêa, C. M. Oishi, e F. L. P. Santos, "Simulation results and applications of an advection bounded scheme to practical flows," *Computational & Applied Mathematics*, vol. 31, no. 3, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S1807-03022012000300009>

- [2] M. Candezano, L. Corrêa, E. Cirilo, e R. de Queiroz, “Numerical simulation of upwinding schemes applied to complex fluid dynamics equations,” *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 41, no. 429, pp. 1–15, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s40430-019-1939-9>
- [3] D. Zhang, C. Jiang, D. Liang, e L. Cheng, “A review on TVD schemes and a refined flux-limiter for steady-state calculations,” *Journal of Computational Physics*, vol. 302, pp. 114–154, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.08.042>
- [4] B. Leonard, “Simple high-accuracy resolution program for convective modelling of discontinuities,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 8, no. 10, pp. 1291–1318, 1988. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/fld.1650081013>
- [5] P. Sweby, “High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 21, no. 5, pp. 995–1011, 1984. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/0721062>
- [6] N. Waterson e H. Deconinck, “Design principles for bounded higher-order convection schemes - a unified approach,” *Journal of Computational Physics*, vol. 224, pp. 182–207, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.01.021>
- [7] A. Harten, “High resolution schemes for hyperbolic conservation laws,” *Journal of Computational Physics*, vol. 49, pp. 357–393, 1983. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90136-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5)
- [8] P. Gaskell e A. Lau, “Curvature-compensated convective transport: SMART, a new boundedness-preserving transport algorithm,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 8, no. 6, pp. 617–641, 1988. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/fld.1650080602>
- [9] J.-J. Wei, B. Yu, W.-Q. Tao, Y. Kawaguchi, e H. s. Wang, “A new high-order-accurate and bounded scheme for incompressible flow,” *Numerical Heat Transfer: Part B*, vol. 43, no. 1, pp. 19–41, 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/10407790390122005>
- [10] H. Ping-Li, T. Wen-Quan, e Y. Mao-Zheng, “Refinement of the convective boundedness criterion of Gaskell and Lau,” *Engineering Computations*, vol. 20, no. 8, pp. 1023–1043, 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.1108/02644400310503008>
- [11] H. Prautzsch, W. Boehm, e M. Paluszny, *Bézier and B-spline techniques*. Springer, 2002.
- [12] D. Balsara e C.-W. Shu, “Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy,” *Journal of Computational Physics*, vol. 160, no. 2, pp. 405–452, 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6443>
- [13] W. Gao, H. Li, e Y. Liu, “A high resolution NV/TVD hermite polynomial upwind scheme for convection-dominated problems,” *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 36, no. 9, pp. 1107–1122, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/mma.2667>
- [14] K. Morton e D. Mayers, *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, 2^a ed. Cambridge University Press, 2005.
- [15] V. Ferreira, R. de Queiroz, G. Lima, R. Cuenca, C. Oishi, A. J.L.F, e S. McKee, “A bounded upwinding scheme for computing convection-dominated transport problems,” *Computers & Fluids*, vol. 57, pp. 208–224, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2011.12.021>
- [16] R. Courant, E. Isaacson, e M. Rees, “On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 5, no. 3, pp. 243–255, 1952. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160050303>
- [17] S. Kutluay, A. Esen, e I. Dag, “Numerical solutions of the Burgers’ equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 167, no. 1, pp. 21–33, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2003.09.043>